

Control de crecidas basado en la solución adjunta de las ecuaciones de aguas poco profundas

Ariel Fraidenraich¹

Resumen: Proponemos una solución para el control de flujo en ríos y canales abiertos utilizando una metodología quasi-Newton para minimizar un funcional Lagrangeano que incluye una función objetivo relevante al problema de control y sujeto a las ecuaciones de conservación de aguas poco profundas bidimensionales. Pertinente a este problema de control es la solución de las ecuaciones adjuntas en lo que nos estaremos focalizando en este trabajo

Palabras clave: *Método de los Volúmenes Finitos, Ecuación Adjunta, Control de Crecidas.*

Abstract: We propose a solution for the control of river and open channel flow using a quasi-Newton methodology to minimize a Lagrangian functional including an objective function relevant to the control problem and subject to the two-dimensional shallow water conservation laws. Pertinent to this control problem is the solution of the adjoint equations in which we will be focusing in this work.

Keywords: *Finite Volume Method, Adjoint Equation, Flood Control.*

Introducción

Presentamos un enfoque para la solución del problema de control de flujo en ríos y canales abiertos basada en las ecuaciones de conservación de aguas poco profundas bidimensionales y una función objetivo relevante al problema de control.

La función objetivo está definida por la diferencia entre la altura de descarga y la función límite deseada y da lugar a la solución de un problema de cuadrados mínimos. Como consecuencia de la solución de este problema aparece un sistema de ecuaciones adjuntas a las ecuaciones de aguas poco profundas. Estas se usan para determinar la sensibilidad de la función objetivo con respecto a las variables de control. El control se obtiene mediante la regulación de las posiciones de una compuerta que conduce a un

¹ Universidad de Belgrano. Departamento de Ingeniería.

vertedero lateral. En este reporte nos focalizamos en la metodología de resolución del sistema de ecuaciones diferenciales adjunto asociado al problema directo (ecuaciones de aguas poco profundas 2D). Este planteo estará centrado en los fundamentos necesarios para la resolución numérica del problema.

Fundamentos y Metodología

Las ecuaciones adjuntas se derivan de la ecuación de conservación de masa y de la cantidad de movimiento que constituyen el problema directo por medio de la minimización de un funcional Lagrangeano que incluye como función objetivo la diferencia de alturas de descarga y la altura deseada.

El sistema de ecuaciones en derivadas parciales adjunto a resolver es:

$$\phi_\tau + A\phi_x + B\phi_y + C\phi + D = 0 \quad (1)$$

A, B, C, D, coeficientes matriciales variables que dependen de la solución directa

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{p^2}{h^2} - gh & \frac{pq}{h^2} \\ -1 & \frac{-2p}{h} & \frac{-q}{h} \\ 0 & 0 & \frac{-p}{h} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{pq}{h^2} & \frac{q^2}{h^2} - gh \\ 0 & \frac{-q}{h} & 0 \\ -1 & \frac{-p}{h} & \frac{-2q}{h} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -g(S_0^x + 2S_f^x) & g(S_0^x + 2S_f^x) \\ 0 & -gh\left(\frac{p}{q^2+p^2} + \frac{1}{p}\right)S_f^x & -gh\frac{p}{q^2+p^2}S_f^y \\ 0 & -ghS_f^x\frac{q}{q^2+p^2} & -gh\left(\frac{q}{q^2+p^2} + \frac{1}{q}\right)S_f^y \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial h} \\ \frac{\partial r}{\partial p} = 0 \\ \frac{\partial r}{\partial q} = 0 \end{pmatrix}$$

$$S_0^x = -\frac{\partial z}{\partial x}, S_0^y = -\frac{\partial z}{\partial y}, S_f^x = \frac{u}{c^2} \frac{1}{h} \sqrt{u^2 + v^2}, S_f^y = \frac{v}{c^2} \frac{1}{h} \sqrt{u^2 + v^2}$$

$$r(h, h_L, p, q, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(h - h_L)^2 \delta(x - x_0, y - y_0), & h > h_L \\ 0, & h \leq h_L \end{cases}$$

$r(h, h_L, p, q, t)$ es la función objetivo a minimizar, h_L es la altura límite que no debe ser superada, x_0, y_0 es el punto sobre la frontera lateral de mayor exceso de agua[2], [13].

$$\tau = T - t \quad (2)$$

T es el tiempo total de simulación, t es el tiempo, $\phi = (\phi, \phi_x, \phi_y)^T$ vector de funciones adjuntas. Interesa llevar el planteo adjunto a una forma similar a la dada por las leyes de conservación que tienen en cuenta las distribuciones de flujos. Operando con la ecuación (1) y comparando con la estructura de la ecuación directa surge

$$F_1 = A \phi \text{ y } F_2 = B \phi, \quad \hat{C} = C - A_x - B_y \quad (3)$$

$\hat{C} =$

$$\begin{pmatrix} 0 & -g(S_0^x + 2S_f^x) - \left(\frac{p^2}{h^2} - gh\right)_x - \left(\frac{pq}{h^2}\right)_y & -g(S_0^y + 2S_f^y) - \left(\frac{q^2}{h^2} - gh\right)_y - \left(\frac{pq}{h^2}\right)_x \\ 0 & -gh\left(\frac{p}{q^2+p^2} + \frac{1}{p}\right)S_f^x - (-2u)_x - (-2v)_y & -gh\frac{p}{q^2+p^2}S_f^y - (-v)_x \\ 0 & -ghS_f^x\frac{q}{q^2+p^2} - (-u)_y & -gh\left(\frac{q}{q^2+p^2} + \frac{1}{q}\right)S_f^y - (-u)_x - (-2v)_y \end{pmatrix} \quad (4)$$

La ecuación diferencial queda transformada en forma conservativa,

$$\phi_\tau + F_{1x} + F_{2y} + \hat{C} \phi + D = 0 \quad (5)$$

Ahora la ecuación adjunta está preparada para ser resuelta por volúmenes finitos con limitadores de flujo con las condiciones de contorno y finales [1],[2] y [3] .

$$\text{Condiciones finales } \phi(x, yT) = \phi^x(x, yT) = \phi^y(x, yT) = 0$$

$$\text{Entrada } \phi^x(x^l, yt) = \phi^y(x^l, yt) = 0$$

$$\text{Laterales } \phi^y(x, y = 0, t) = \phi^y(x, y = L_y, t) = 0$$

$$\text{Salida : } \phi^y(x = L_x, y, t) = 0, \quad \phi(x = L_x, y, t) + 2u(x = L_x, y, t)\phi^x(x = L_x, y, t) = 0$$

En este caso, el dominio para la resolución por volúmenes finitos es (Fig. 1),

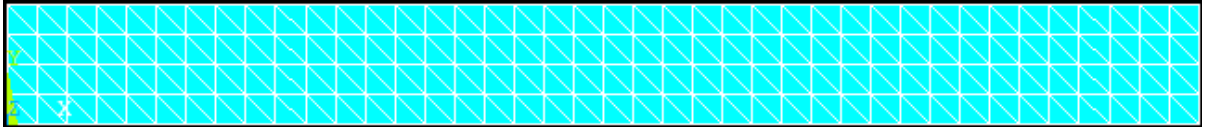


Figura 1 Malla de volúmenes finitos ($L_y=4m$, $L_x=160m$).

Para aplicar el método de los volúmenes finitos FVM se integra el sistema diferencial en la dirección normal a la frontera de cada célula (Roe, Van Der Leer y otros)[8]. Este procedimiento permite integrar sistemas conservativos en la dirección de upwinding en regiones arbitrarias del dominio espacial. Para que resulten esquemas estables discretos cerca de las fronteras se utilizan limitadores de flujo tipo MUSCL (Superbee, Hirsch, Leveque, Lyra)[1], [7] y [10].

Considerando explícitamente el término fuente, la ecuación (5) queda reducida a

$$\frac{\partial \phi(x,y,t)}{\partial t} + \frac{\partial F_1(\phi(x,y,t))}{\partial x} + \frac{\partial F_2(\phi(x,y,t))}{\partial y} = G(x, y, \phi(x,y,t)) \quad (6)$$

donde el término fuente $G(x, y, \phi(x,y,t)) = -\hat{C}\phi - D$ (7)

Que a su vez se puede expresar como

$$\frac{\partial \phi(x,y,t)}{\partial t} + \nabla \cdot F(\phi(x,y)) = G(x, y, \phi(x,y,t)) \quad (8)$$

Para expresar esta ecuación diferencial mediante una formulación variacional se lleva a una expresión integral[8][9],

$$\iint \frac{(\phi^{n+1}(x,y) - \phi^n(x,y))}{\Delta t} dx dy + \iint \nabla \cdot F(\phi(x,y)) dx dy = \iint G(x, y, \phi(x,y)) dx dy$$

Utilizando el teorema de Gauss se halla la expresión analítica

$$\iint \frac{(\phi^{n+1}(x,y) - \phi^n(x,y))}{\Delta t} dx dy + \int F(\phi^n(x,y)) \cdot d\sigma = \iint G(x, y, \phi^n(x,y)) dx dy \quad (9)$$

Resolviendo el primer término

$$A_i \frac{(\phi^{n+1}_i - \phi^n_i)}{\Delta t} + \int F(\phi^n(x, y)) \cdot n d\sigma = \iint G((x, y), \phi^n(x, y)) dx dy \quad (10)$$

ϕ^{n+1}_i Es la función vectorial adjunta en la celda i-sima, A_i es el volumen ocupado por la celda i-sima.

Para discretizar el segundo término de flujos se descompone la integral sobre la frontera en suma de integrales sobre la frontera

$$A_i \frac{(\phi^{n+1}_i - \phi^n_i)}{\Delta t} + \sum_{j \in \kappa_i} \int F(\phi^n(x, y)) \cdot n_{ij} d\sigma = \iint G((x, y), \phi^n(x, y)) dx dy \quad (11)$$

Se integra el flujo sobre cada parte de la frontera partida conectado con la celda identificada como k_i . Entonces habrá que calcular todos los flujos sobre cada arco interviniente en la frontera y la integral de volumen del término fuente. [4], [5] y [6].

$$\text{Y aproximamos las circulaciones } \oint (F \cdot n) ds \cong \sum_{r=1}^4 (F_r^* \cdot n_r) \quad (12)$$

F_r^* es el flujo en cada dirección compuesto con el camino parametrizado, n_r , es la normal a cada cara externa de la celda considerada.

A la función vectorial F se la conoce como el flujo normal a cada cara. $A = \frac{\partial(F \cdot n)}{\partial \phi}$ es la matriz Jacobiana [4] en la dirección ortogonal a cada cara externa

$$F \cdot n = \begin{pmatrix} \left(\frac{p^2}{h^2} - g h \right) \phi_x & \left(\frac{pq}{h^2} \right) \phi_x + \left(\frac{q^2}{h^2} - g h \right) \phi_y \\ -\phi - \frac{2p}{h} \phi_x - \frac{q}{h} \phi_y & -\frac{q}{h} \phi_x \\ -\frac{p}{h} \phi_y & -\phi - \frac{p}{h} \phi_x - \frac{2q}{h} \phi_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{\partial(F \cdot n)}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} 0 & \left(\frac{p^2}{h^2} - g h \right) n_1 + \left(\frac{pq}{h^2} \right) n_2 & \left(\frac{q^2}{h^2} - g h \right) n_2 \\ -n_1 & \frac{2p}{h} n_1 - \frac{q}{h} n_2 & -\frac{q}{h} n_1 \\ -n_2 & -\frac{p}{h} n_2 & \frac{2q}{h} n_2 \end{pmatrix} \quad (13)$$

Se calculan los autovalores y autovectores [10] y se toma un promedio en el sentido de ROE [4], según cada cara de la frontera

$$\hat{u} = \frac{u_R \sqrt{h_R} + u_L \sqrt{h_L}}{\sqrt{h_R} + \sqrt{h_L}}, \quad (14)$$

$$\hat{v} = \frac{v_R \sqrt{h_R} + v_L \sqrt{h_L}}{\sqrt{h_R} + \sqrt{h_L}}, \quad (15)$$

$$\hat{c} = \sqrt{g \frac{(h_R + h_L)}{2}}. \quad (16)$$

Que es la terna de valores de la función vectorial adjunta evaluada en las caras de cada celda. Se evalúa la proyección del flujo en la dirección normal a cada celda de la siguiente manera [4], [5].

Las condiciones de contorno para los flujos en las caras en las fronteras de borde, para los flujos dados en coordenadas cartesianas[11]

$$F_1 = \begin{pmatrix} \left(\frac{p^2}{h^2} - g h\right) \varphi_x + \left(\frac{pq}{h^2}\right) \varphi_y \\ -\varphi - \frac{2p}{h} \varphi_x - \frac{q}{h} \varphi_y \\ -\frac{p}{h} \varphi_y \end{pmatrix}, \text{ flujo en un punto del dominio en la dirección } x$$

$$F_2 = \begin{pmatrix} \left(\frac{q^2}{h^2} - g h\right) \varphi_y + \left(\frac{pq}{h^2}\right) \varphi_x \\ -\frac{q}{h} \varphi_x \\ -\varphi - \frac{p}{h} \varphi_x - \frac{2q}{h} \varphi_y \end{pmatrix}, \text{ flujo en un punto del dominio en la dirección } y$$

$$F_1 \cdot n = \begin{pmatrix} \left(\frac{p^2}{h^2} - g h\right) \varphi_x + \left(\frac{pq}{h^2}\right) \varphi_y \\ -\varphi - \frac{2p}{h} \varphi_x - \frac{q}{h} \varphi_y \\ -\frac{p}{h} \varphi_y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para evaluar las condiciones de contorno en la sección de entrada consideramos $v = 0$, $\varphi_y = 0$, de donde resulta

$$F_1 \cdot n = \left(\frac{p^2}{h^2} - g h\right) \varphi_x.$$

En los laterales: ($v = 0$, $\varphi_y = 0$), pero la normal exterior apunta en la dirección de y positivo, entonces

$$F_2 = \begin{pmatrix} \left(\frac{q^2}{h^2} - g h \right) \varphi_y + \left(\frac{pq}{h^2} \right) \varphi_x \\ -\frac{q}{h} \varphi_x \\ -\varphi - \frac{p}{h} \varphi_x - \frac{2q}{h} \varphi_y \end{pmatrix}$$

Considerando que los bordes laterales son impermeables estos flujos en la dirección $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ son nulos.

$$\text{En la dirección de salida, } F_1 \cdot n = \begin{pmatrix} \left(\frac{p^2}{h^2} - g h \right) \varphi_x + \left(\frac{pq}{h^2} \right) \varphi_y \\ -\varphi - \frac{2p}{h} \varphi_x - \frac{q}{h} \varphi_y \\ -\frac{p}{h} \varphi_y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

Siendo $\varphi_y = 0$ y $-\varphi - \frac{2p}{h} \varphi_x = 0$, por condición de contorno $\left(\frac{p^2}{h^2} - g h \right) \varphi_x$ es el flujo en la dirección de salida para cada tiempo.

Para realizar el control adoptamos la condición de borde para $T > T_c$ la condición erogada por la compuerta aguas arriba.

$$q(x = L_v, T) = b(t) C_d \sqrt{2 g (H(x = 0, t) - H(x = X_v, t))} \quad (18)$$

siendo

q Caudal erogado por el vertedero lateral (estructura de control), L_v Distancia óptima en la dirección x que actúa la estructura de control, T : Tiempo donde se inicia el control que coincide con la llegada de la crecida a X_v (punto más comprometido ubicado en la sección lateral), T_c Tiempo de llegada de la crecida, C_d : Coeficiente de descarga para el vertedero, $b(t)$ Apertura temporal de la compuerta de control, $H(x = 0, t)$ Altura total aguas arriba, $H(x = X_v, t)$ altura total en la posición X_v

Algoritmo:

Hallarla posición sobre el contorno lateral del dominio donde se ubicará la estructura de control tal que sea la óptima para la descarga del caudal acumulado.

Proponer una $b(t)$ apertura inicial como apertura actual de la estructura de control. Esta incide como condición de contorno en el problema.[1], [2].

1. Si el Sistema no converge
 - a. Resolver las ecuaciones de aguas poco profundas bidimensionales para la apertura dada utilizando una metodología FEM.[1], [2].
 - b. Resolver en sentido inverso temporal el problema adjunto utilizando una metodología FVM.[6], [8].
 - c. Si el sistema converge utilizando una metodología quasi-Newton
 - i. Romper el ciclo iterativo debido a que se halló la solución
 - ii. Calcular las sensibilidades asociadas a la resolución del problema adjunto.
 - iii. Apertura Actual = apertura actualizada según el método de Newton [1], [2] y [15].

Discusión

Se trata de implementar una ley de uso de la compuerta ubicado sobre el vertedero lateral para ir controlando la crecida. Estos esquemas numéricos muestran la forma en que se va a desarrollar la parte de control relativo a la forma de apertura de la compuerta [15]. Aún no se ha encontrado la forma de optimizar la posición del vertedero lateral de manera que sea una solución automática. Es necesario encontrar alguna relación entre los coeficientes de sensibilidad halladas para una apertura dada más directa para reducir los costos computacionales. Se ha implementado la solución directa [12] del dominio proporcionado incluyendo islas y optimizado con técnicas de computación de alto rendimiento HPC (High parallelcomputing)[12], [14] y [15].

Conclusiones:

Se agrega una condición de contorno propuesta por la ecuación (18) cuando llega la crecida al lugar más desfavorable del contorno lateral según una ley de descarga de un vertedero. La solución es bastante atrayente para su utilización práctica mediante el uso de coeficientes de sensibilidad para regular la apertura de la estructura de control utilizando la técnica numérica de quasi Newton y la aplicación de los programas [12] y [14].

Referencias

- [1] Hirsh, C. (1990). *Numerical Computation of Internal and external flow*. Vol. 2, Wiley, New York.
- [2] Katapodes, D. and Sanders B. F. (1999). "Active Flood Hazard Mitigation. II omnidirectional Wave Control" *Journal of Hidraulic Engineering*, 125, 1071-1083.
- [3] Sanders, B. F.; Katapodes, N. D. (2000). "Adjoint Sensitivity Analysis for Shallow – Water Wave Control", *Journal of EngeneeringMechanichs*", 126, 9, 909-91.
- [4] Alcrudo, F.; García-Navarro. (1993). "A high-resolution Godunovtype scheme in finite volumes for the 2D shallow water equations." *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 16, 489–505.
- [5] Alcrudo, F., García-Navarro, P.; Saviron, J. (1992). "Flux difference splitting for 1D open chanel,
- [6] Bermúdez, A.; López, X.; Vázquez Cendón, M. E. (2017). Finite Volume methods for multi-component Euler equations with source terms. *Computers and Fluids*, 156, 113-134.
- [7] LeVeque, R. J. (1992). *Numerical Methods for Conservation Laws*, Birkhauser.
- [8] PHD Mathematics Thesis, Vázquez Cendón, M. E. (1994). Estudio de esquemas descentrados para su aplicación a las leyes de conservación hiperbólicas con términos fuentes. Universidad de Santiago de Compostela.

- [9]Bermúdez, A.; Dervieux, A.; Desideri,,J. A.; Vázquez Cendón,M. E. (1995). Upwinding Schemes for the two-Dimensional Shallow Water Equations with variable Depth using unstructured Meshes, rapport INRIA. France.
- [10] PHD Thesis, Maciel Lyra, P. R.. (1994). Unstructured Grid Adaptative for Fluid dynamics flows and Heat conduction, Phd. Thesis, University of Wales Swansea.
- [11] Soumendra, N. K.; Kiran, P. (2008). Finite Volume Model for Shallow Water Equations with Improved Treatment of Source terms, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, 134, 231-242.
- [12] Pierre Lang, Telemac Modelling System Telemac -2D Software. Version 6.0. Reference manual, 2010. BLUEKENUE is the property of the Canadian Hydraulics Centre, Ottawa, Ontario, Canada. Copyright ©1998-2010 Canadian Hydraulics Centre, National Research Council. <http://www.nrc-nrc.gc.ca/eng/ibp/chc/software/kenue/blue-kenue.html>.
- [13] Marchuk, G. I.(1995). Adjoint Equations and Analysis of Complex Systems. Kluwer Academic: Boston.
- [14] BLAS Duff, Iain S.; Hervoux, Michael A.; Pozo, Roldan (2002). "An Overview of the Sparse Basic Linear Algebra Subprograms: The New Standard from the BLAS Technical Forum". TOMS. 28, 2 239–267. [doi:10.1145/567806.567810](https://doi.org/10.1145/567806.567810).
- [15]Fraidenaich, A.,Altenberg, A. E., Pérez M. J.. (2019). "Tratamiento Numérico y Experimental de Inundaciones en Ríos y Canales Abiertos", Perspectivas,In press, Tercera edición 2019.